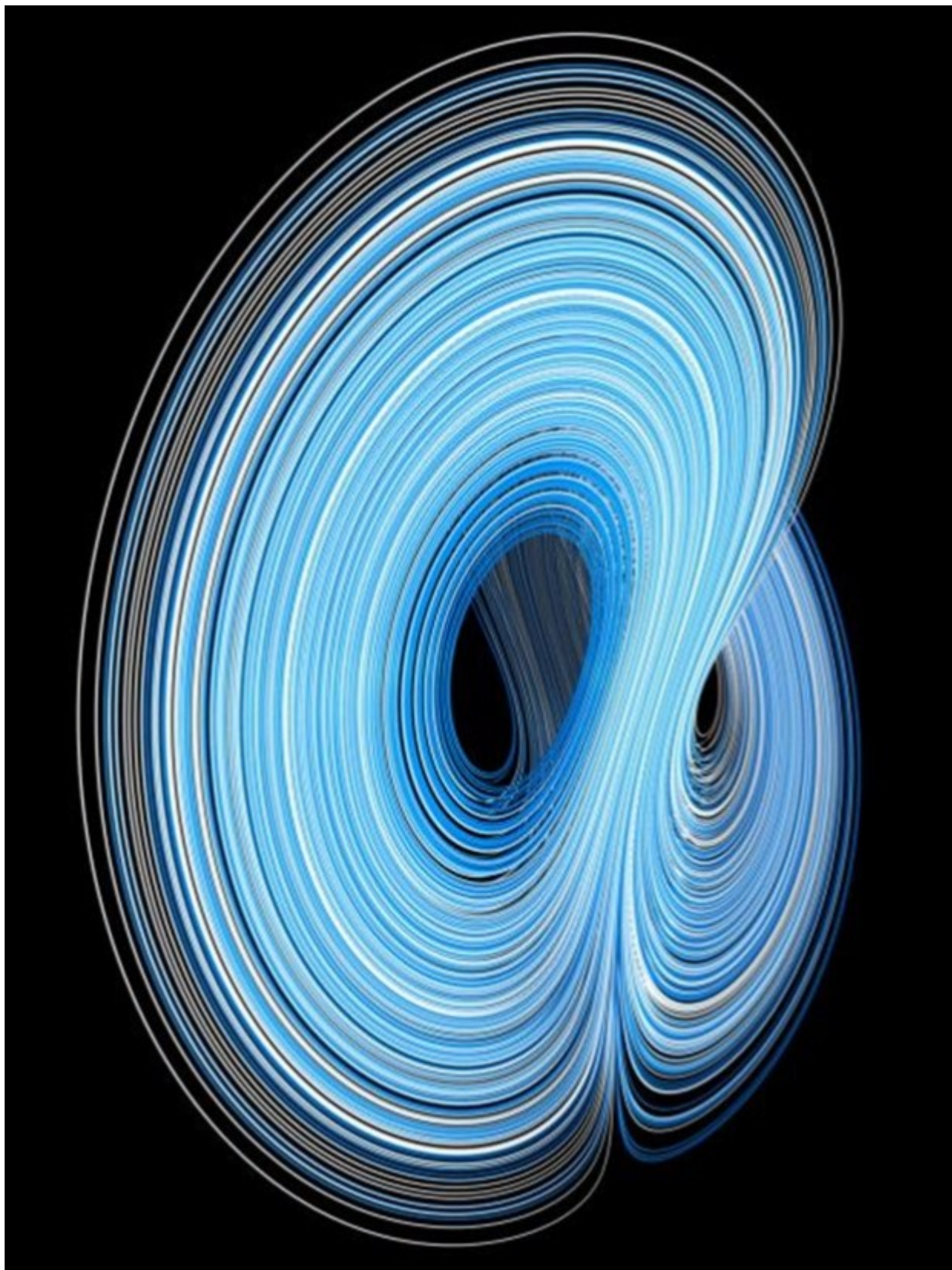


1 Αυγούστου 2014

# Η ομορφιά των μαθηματικών

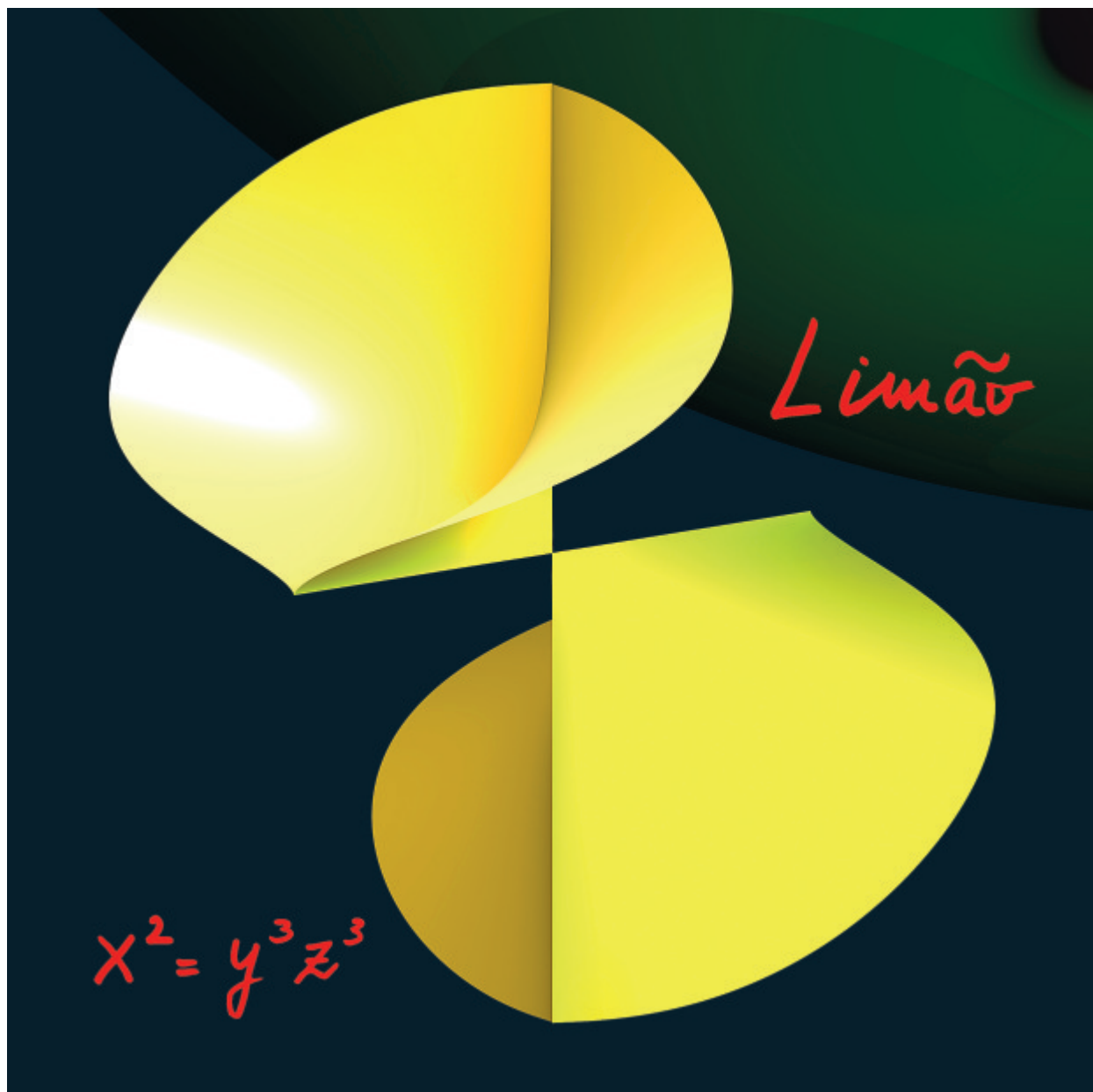
/ [Επιστήμες, Τέχνες & Πολιτισμός](#)



*Χάος - ο ελκυστής του Λόρεντζ, οπτικοποίηση για το Imaginary από τους Aurelien Alvarez, Etienne Ghys και Jos Leys*

Οι μαθηματικοί βιώνουν την ομορφιά των εξισώσεων όπως οι κοινοί θνητοί βιώνουν την ομορφιά των έργων τέχνης. Ο διακεκριμένος νευροβιολόγος Σεμίρ Ζέκι εξηγεί τι μας λέει αυτό για τον ανθρώπινο εγκέφαλο

Θα λέγατε ποτέ ότι μια εξίσωση είναι όμορφη; Αν δεν έχετε καλή σχέση με τα μαθηματικά, μάλλον θα απαντήσετε αρνητικά. Οι μαθηματικοί ωστόσο πολύ συχνά χρησιμοποιούν τη λέξη «ωραία» για να εκφράσουν τον θαυμασμό τους προς μια εξίσωση που θεωρούν ξεχωριστή. Και μάλιστα δεν μένουν απλώς στα λόγια. Οι περισσότεροι υποστηρίζουν ότι αυτή την ομορφιά τη νιώθουν πραγματικά, τους συγκινεί με τον ίδιο τρόπο που θα τους συγκινούσε καθετί ωραίο, όπως για παράδειγμα ένα έργο τέχνης. Αυτό ακριβώς ήταν που ώθησε τον Σεμίρ Ζέκι, διακεκριμένο νευροεπιστήμονα και καθηγητή του University College του Λονδίνου, να εξετάσει τους ισχυρισμούς τους στον εγκεφαλικό τομογράφο.



Το «Λεμόνι» (φωτογραφία αριστερά) και το «Παράδεισος και κόλαση» είναι δύο από τις «κλασικές» αλγεβρικές εξισώσεις που οπτικοποιήθηκαν με το πρόγραμμα Surfer του Imaginary από τον Herwig Hauser

Ο καθηγητής Ζέκι, ο οποίος έχει στο ενεργητικό του μια σειρά σημαντικές ανακαλύψεις σχετικά με το οπτικό σύστημα του εγκεφάλου, έχει στρέψει τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον του στον τομέα της νευροαισθητικής διερευνώντας την αισθητική «λειτουργία» του εγκεφάλου μας. Ενα από τα πιο σημαντικά ευρήματα των μελετών του, οι οποίες ήταν οι πρώτες του είδους, είναι ότι η ομορφιά, είτε προέρχεται από οπτικά ερεθίσματα, όπως στην περίπτωση ενός ζωγραφικού πίνακα ή ενός γλυπτού, είτε από ακουστικά, όπως στην περίπτωση ενός μουσικού κομματιού, «αποτυπώνεται» στην εγκεφαλική δραστηριότητά μας ενεργοποιώντας κυρίως μια συγκεκριμένη περιοχή στον λεγόμενο «συναισθηματικό εγκέφαλο», τον έσω κορχομετωπιαίο φλοιό (mOFC). Αντίστοιχα

ένα έργο τέχνης ή ένα μουσικό κομμάτι το οποίο θεωρούμε άσχημο ενεργοποιεί διαφορετικές – αλλά και πάλι συγκεκριμένες – περιοχές, κυρίως την αμυγδαλή και τον κινητικό φλοιό (δείτε και «Το μέτρο της ομορφιάς», «BHMAScience», 7.10.2012).

Τι έκανε όμως τον νευροβιολόγο να στρέψει το ενδιαφέρον του από την «απτή» ομορφιά των αισθήσεων στην καθαρά «αφηρημένη» ομορφιά των μαθηματικών; «Οι λόγοι είναι δύο» μας απαντά ο κ. Ζέκι, τον οποίο συναντήσαμε στην Αθήνα, όπου βρέθηκε με αφορμή την αναγόρευσή του ως επίτιμου διδάκτορα του Ιατρικού Τμήματος της Σχολής Επιστημών Υγείας του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (ειδικά για την περίπτωση μάλιστα εκδόθηκε και διατέθηκε στην τελετή το βιβλίο «Η νευροαισθητική στον 21ο αιώνα – Από τον Πλάτωνα στον Ζέκι» της επίκουρης καθηγήτριας Νευρολογίας Μαρίας Αναγνωστούλη-Πουλημένου). «Κατ' αρχάς ήθελα να δω αν αυτή η συναισθηματική εμπειρία της ομορφιάς που περιγράφουν οι μαθηματικοί και η οποία προέρχεται από μια πολύ νοητική πηγή προκαλεί δραστηριότητα στα ίδια σημεία του εγκεφάλου με την ομορφιά που προέρχεται από περισσότερο αισθητηριακές πηγές» εξηγεί. «Δεύτερον, από τον Πλάτωνα και μετά οι μεγάλοι φιλόσοφοι έχουν υποστηρίξει ότι από την ομορφιά παίρνουμε γνώση. Τι είδους γνώση παίρνουμε λοιπόν από τα μαθηματικά; Οι μεγάλοι μαθηματικοί και φυσικοί, όπως ο Πολ Ντιράκ και ο Αλμπερτ Αϊνστάιν, έχουν πει ότι το βασικό χαρακτηριστικό ενός μαθηματικού τύπου ο οποίος είναι αληθής είναι η ομορφιά. Η μελέτη αυτού του είδους της ομορφιάς αναδεικνύεται επομένως σε ένα πολύ ευρύ και πολύ βαθύ ερώτημα σχετικά με το τι είδους γνώση για τον κόσμο μας μάς προσφέρει».

Ομορφιά = αλήθεια

Για να στηρίξει την άποψη ότι με κάποιον τρόπο στο μυαλό μας η ομορφιά συνδέεται με αυτό που θα αποκαλούσαμε «σωστό» ή «αλήθεια» ο καθηγητής φέρνει ως παράδειγμα την περίπτωση του γερμανού μαθηματικού, θεωρητικού φυσικού και φιλοσόφου Χέρμαν Βείλ, ο οποίος ήταν ένας από τους πρώτους που προσπάθησαν να συνδέσουν τον ηλεκτρομαγνητισμό με τη γενική θεωρία της σχετικότητας. «Κατέληξε σε έναν μαθηματικό τύπο που ο ίδιος πίστευε ότι ήταν πολύ ωραίος αλλά κανείς δεν τον αποδεχόταν γιατί έλεγαν ότι δεν ισχύει» αναφέρει. «Για καμιά δεκαριά χρόνια κανένας δεν έμπαινε καν στον κόπο να τον κοιτάξει. Και ύστερα, με την έλευση της κβαντομηχανικής, ξαφνικά αποδείχθηκε ότι ίσχυε. Εδώ έχουμε λοιπόν μια πίστη στα γεγονότα η οποία στηρίζεται στην ομορφιά πολύ προτού το γεγονός γίνει γνωστό. Και αυτό είναι εκπληκτικό. Ποιες είναι λοιπόν οι αλήθειες που τα μαθηματικά αποκαλύπτουν μέσω της ομορφιάς;».

Η παρατήρηση ότι ένα από τα βασικά επιχειρήματα όσων βρίσκουν μια εξίσωση

ωραία είναι πως «έχει νόημα» γι' αυτούς δίνει κατά την άποψη του καθηγητή τροφή για σκέψη σε πολλά επίπεδα. «Μπορούμε να πούμε το ίδιο και για την «Πιετά» του Μικελάντζελο, ότι έχει νόημα; Μπορούμε. Τι σημαίνει, λοιπόν, αυτό το «έχει νόημα;»» διερωτάται. «Φαντάζομαι ότι σημαίνει πως κάτι στη λογική και στον εγκέφαλό μας μάς λέει ότι είναι σωστό, ότι ταιριάζει» συμπληρώνει, προσθέτοντας ότι τα αποτελέσματα αυτής της τελευταίας μελέτης έκαναν τον ίδιο και τους νευροεπιστήμονες και μαθηματικούς συνεργάτες του να συνειδητοποιήσουν ότι άνοιξαν ένα νέο πεδίο προβληματισμού το οποίο απλώνεται σε πολλούς τομείς. «Εγώ τουλάχιστον προβληματίζομαι σχετικά με το εξής: Έχουμε εξελιχθεί στο Σύμπαν. Σε ποιον βαθμό η διατεταγμένη δομή αυτού του Σύμπαντος έχει αποτυπωθεί στον εγκέφαλό μας;» λέει. «Ένα παράδειγμα που μου αρέσει να φέρνω είναι αυτό της θεωρίας των χορδών. Η θεωρία των χορδών είναι μια θεωρία για την οποία δεν υπάρχει πειραματική απόδειξη. Είναι καθαρά θεωρητική. Το ερώτημα είναι: Θα μπορούσαν οι άνθρωποι να επινοήσουν μια θεωρία σαν αυτήν αν δεν είχαμε την εγκεφαλική δομή και λειτουργία που διαθέτουμε; Πιστεύω ότι υπάρχει κάτι στην οργάνωση του εγκεφάλου μας το οποίο μας επιτρέπει να επινοούμε τέτοιες θεωρίες».

Το κάλλος της γνώσης

Υπό αυτό το νέο πρίσμα, σε τι χρησιμεύει τελικά η ομορφιά; «Αυτό είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα συμπεράσματα που αναδεικνύονται» μας απαντά. «Οι περισσότεροι, συμπεριλαμβανομένων των επιστημόνων και των καλλιτεχνών, θα σας πουν ότι η επιστήμη είναι για τη γνώση και η τέχνη είναι για την απόλαυση. Η ομορφιά και η τέχνη δεν είναι το ίδιο, αλλά για πολύ μεγάλο διάστημα είχαν εξισωθεί, και η ομορφιά είναι επίσης για την απόλαυση. Δεν νομίζω όμως ότι ο Πλάτων θα είχε την ίδια άποψη. Ο Πλάτων θα σας έλεγε ότι η ομορφιά οδηγεί στη γνώση και στη σοφία. Και η γνώση και η σοφία, η απόκτηση της γνώσης, κινούν τη λειτουργία του εγκεφάλου. Ο εγκέφαλος παλεύει διαρκώς για τη γνώση». Αυτό κατά την άποψη του καθηγητή τοποθετεί τον τομέα της νευροαισθητικής σε ένα άλλο, πολύ πιο «βαρύ» επίπεδο από την ελαφρότητα που ενδεχομένως αποπνέει για ορισμένους το συνθετικό «αισθητική». «Για μεγάλο διάστημα ο κόσμος έλεγε: «Νευροαισθητική, τι είναι αυτό; Ο Ζέκι γέρασε. Δούλεψε πάνω στην όραση, στην όραση των χρωμάτων, της κίνησης, των σχημάτων, στις οπτικές περιοχές του εγκεφάλου και τα λοιπά, αυτά ήταν σκληρή επιστήμη. Τώρα γέρασε και κάνει μαλακή επιστήμη»» μας λέει. «Τα πράγματα όμως είναι αντίστροφα. Αυτό που κάνω τώρα είναι σκληρή επιστήμη. Η άλλη είναι εύκολη επιστήμη. Το να κοιτάζεις τις συνδέσεις του εγκεφάλου, από το Α στο Β, αυτό είναι εύκολο. Το να κοιτάζεις πώς αποκρίνονται τα κύτταρα στα ηλεκτρόνια, αυτό είναι εύκολο. Το να μπορέσεις όμως να κατανοήσεις τη νευροβιολογική βάση της ομορφιάς και τι αυτή θέλει να πει και πώς ενσωματώνονται διαφορετικά είδη ομορφιάς σε ένα ενιαίο σύστημα,

αυτό είναι σκληρή επιστήμη. Πολύ σκληρή επιστήμη».

Ωραίες και άσχημες

Οι εξισώσεις στον τομογράφο

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

*Ωραιότερη εξίσωση κρίθηκε η ταυτότητα του Οίλερ (αριστερά), ασχημότερη η σειρά απείρων όρων του Ραμάνουτζαν (δεξιά)*

Προκειμένου να ελέγξει αν η «αφηρημένη» ομορφιά των εξισώσεων, η οποία είναι αποτέλεσμα καλλιέργειας και μάθησης και απορρέει από νοητικές διεργασίες και όχι από αισθητηριακά ερεθίσματα, βιώνεται με τον ίδιο τρόπο με την ομορφιά που προκύπτει από την τέχνη, ο νευροεπιστήμονας αποφάσισε να ακολουθήσει την ίδια πειραματική μεθοδολογία με τις προηγούμενες μελέτες του. Με μία διαφορά: ενώ στα προηγούμενα πειράματα, στα οποία είχε διερευνήσει την «οικουμενική» ομορφιά των αισθήσεων, είχε επιλέξει να εξετάσει «κοινούς θνητούς» αποκλείοντας τους ειδήμονες όπως οι κριτικοί και οι ιστορικοί έργων τέχνης ή οι ζωγράφοι και οι μουσικοί, τη φορά αυτή οι συμμετέχοντες ήταν μαθηματικοί και μάλιστα προχωρημένου επιπέδου – μεταπτυχιακοί ή μεταδιδακτορικοί ερευνητές. Οι 15 συμμετέχοντες κλήθηκαν αρχικά να αξιολογήσουν μια σειρά εξισώσεις ως «ωραίες», «ουδέτερες» ή «άσχημες». Στη συνέχεια είδαν σε τέσσερις διαφορετικές συνεδρίες τις εξισώσεις αυτές να προβάλλονται σε μια οθόνη ενώ οι ίδιοι υποβάλλονταν σε λειτουργική μαγνητική τομογραφία (fMRI) και έκαναν ξανά την αξιολόγησή τους.

Όπως μας λέει ο Σεμίρ Ζέκι, σε ορισμένες περιπτώσεις η αξιολόγηση διέφερε – κάποιος π.χ. μπορεί την πρώτη φορά να είχε αξιολογήσει μια εξίσωση ως «ουδέτερη» αλλά στον εγκεφαλικό τομογράφο να τη θεώρησε «ωραία» ή το αντίστροφο. Το σημαντικό όμως εύρημα που προέκυψε από τις απεικονίσεις ήταν ότι, πέραν των πολλών διαφορετικών περιοχών που ενεργοποιούνται όταν κάποιος εξετάζει μια μαθηματική εξίσωση, στις «ωραίες» εξισώσεις ο εγκέφαλος των εθελοντών εμφάνιζε δραστηριότητα στον έσω κογχομετωπιαίο φλοιό, ακριβώς όπως είχε συμβεί στα πειράματα με τα έργα τέχνης και τις μουσικές συνθέσεις. Επιπλέον, όπως και στα προηγούμενα πειράματα, όσο πιο ωραία έκρινε ο



εθελοντής μια εξίσωση τόσο πιο έντονη ήταν η δραστηριότητα στη συγκεκριμένη περιοχή. Αν και παρατηρήθηκαν κάποιες αποκλίσεις, σε γενικές γραμμές για ορισμένες εξισώσεις υπήρξε ομοφωνία: η πιο ωραία από όλες, βάσει των αξιολογήσεων, ανακηρύχθηκε η ταυτότητα του Οϊλερ, ακολουθούμενη από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τον τύπο του Οϊλερ που αφορά τη σχέση μεταξύ εκθετικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων και τις εξισώσεις των Κοσί - Ρίμαν. Ως πιο άσχημη κρίθηκε από τους περισσότερους η σειρά απείρων όρων για  $1/\pi$  του Ραμάνουτζαν, ακολουθούμενη από τη συναρτησιακή εξίσωση του Ρίμαν. Στην κατηγορία των «ουδέτερων» τοποθετήθηκαν μεταξύ άλλων η χαρακτηριστική του Οϊλερ (ή τύπος πολυέδρων του Οϊλερ) και το θεώρημα Γκάους - Μπονέ.

## ΑΦΑΙΡΕΣΗ Ή ΕΙΚΟΝΑ;

Στον εγκέφαλο ενός μαθηματικού

Τι είναι εκείνο που κάνει μια εξίσωση ωραία στα μάτια ενός μαθηματικού; «Νομίζω ότι ένας σημαντικός παράγοντας είναι ο συνδυασμός της απλότητας με την πολυπλοκότητα. Θα πρέπει, όταν την κοιτάζεις, να είναι κατά κάποιον τρόπο κομψά απλή, αλλά ταυτόχρονα να μεταδίδει κάτι βαθύ και σύνθετο» λέει μιλώντας στο «Βήμα» ο Αντρέας Ντάνιελ Ματ, μαθηματικός του Μαθηματικού Ινστιτούτου του Ομπερβόλφαχ στη Γερμανία. Ολα βεβαίως, όπως προσθέτει, εξαρτώνται από την εμπειρία που έχει κάποιος. «Αν δουλεύεις πολύ με πολύ σύνθετες εξισώσεις, προφανώς τις βρίσκεις και αυτές πολύ ωραίες γιατί τις ξέρεις και σε συγκινούν μόλις τις βλέπεις» εξηγεί. «Εδώ λοιπόν ερχόμαστε στον δεύτερο παράγοντα, τη συγκίνηση, τα συναισθήματα που σου προκαλεί η εξίσωση όταν την κοιτάζεις. Αυτά φυσικά σχετίζονται είτε με την εμπειρία που είχες δουλεύοντας με αυτήν είτε με την εμπειρία που βιώνεις εκείνη τη στιγμή όταν κοιτάζεις μια εξίσωση και αυτή σου προσφέρει ένα νέο στοιχείο ή μια καινούργια γνώση. Για παράδειγμα, η ταυτότητα του Οϊλερ δίνει μια νέα σχέση μεταξύ των άρρητων αριθμών και του  $1$  ή του  $-1$  και του  $0$ . Είναι απλή, αλλά σου δείχνει μια σχέση η οποία σε εκπλήσσει και δεν την περίμενες». Ο τρίτος παράγοντας είναι δυσκολότερο να προσδιοριστεί αλλά φαίνεται να είναι εξίσου σημαντικός - αν όχι σημαντικότερος, αν σκεφθούμε και την «εξίσωση» των επιστημόνων που θέλει την ομορφιά να ισοδυναμεί με το «σωστό» και την «αλήθεια». «Δεν ξέρω πώς να το περιγράψω ακριβώς, είναι ένα συναίσθημα, μια αίσθηση ότι πρόκειται για κάτι κλασικό και αιώνιο, ένα είδος μακροπρόθεσμης ομορφιάς - κάτι το οποίο υπήρχε, υπάρχει και θα υπάρχει πάντα, θα είναι πάντα έτσι. Είναι απλό αλλά και πολύ βαθύ ταυτοχρόνως».

Ο καθηγητής Ζέκι μας είπε ότι ο σερ Μάικλ Ατίγια, ο επιφανής βρετανός μαθηματικός με τον οποίο συνεργάστηκε στη μελέτη, απογοητεύθηκε από το



γεγονός ότι η σειρά απείρων όρων του Ραμάνουτζαν, μια πολύ σημαντική εξίσωση, αξιολογήθηκε ως η πιο άσχημη. Ο κ. Ματ έχει όμως μια εξήγηση γι' αυτό και μας τη σχηματοποιεί με έναν μουσικό παραλληλισμό, παρομοιάζοντας την εξίσωση του Οϊλερ με τη μουσική του Μότσαρτ και εκείνη του Ραμάνουτζαν με τη σύγχρονη κλασική μουσική. «Εγώ θεωρώ ότι και η εξίσωση του Ραμάνουτζαν είναι πολύ ωραία, πρέπει όμως να την έχει συνηθίσει κάποιος για να την εκτιμήσει. Ξέρετε, υπάρχει σχέση με την τέχνη και τη μουσική. Για παράδειγμα, η κλασική μουσική του Μότσαρτ είναι εύκολη στο άκουσμα, την έχουμε συνηθίσει και μας αρέσει αμέσως, όπως η εξίσωση του Οϊλερ. Η σύγχρονη κλασική μουσική είναι όμως δύσκολη, όπως και η free jazz. Αρχικά μπορεί να ηχεί ακόμη και άσχημη. Όταν όμως κάποιος «μπει» μέσα σε αυτήν, τη λατρεύει. Οι σύνθετες εξισώσεις όπως αυτή του Ραμάνουτζαν είναι κάπως έτσι. Δεν ξέρω αν μπορεί κάποιος να πει ότι είναι σύγχρονα μαθηματικά, είναι όμως μια διαφορετική θεωρία των αριθμών».

Ο μαθηματικός εργάζεται μεταξύ άλλων στο Imaginary, ένα πρόγραμμα του Ινστιτούτου του Ομπερβόλφαχ το οποίο έχει ως στόχο να κάνει κατανοητά τα μαθηματικά στο ευρύ κοινό. Ενα από τα «εργαλεία» που έχουν αναπτύξει για αυτόν τον σκοπό είναι το Surfer, ένα λογισμικό που επιτρέπει στον χρήστη να οπτικοποιήσει εξισώσεις και να τις μετατρέψει, προσθέτοντας χρώματα και τοποθετώντας τις στον χώρο, σε πραγματικά έργα τέχνης (το «BHMAScience» σε συνεργασία με το Ινστιτούτο είχαν διοργανώσει έναν σχετικό διαγωνισμό – δείτε και «Η ομορφιά του Imaginary», «BHMAScience», 13.2.2011). Το Surfer λειτουργεί μόνο με αλγεβρικές εξισώσεις, οπότε δεν μπορεί να μας προσφέρει τη χαρά να απολαύσουμε έστω οπτικά τις εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη του καθηγητή Ζέκι. Το βέβαιον πάντως είναι ότι, ακόμη και αν είχαμε αυτή την ευκαιρία, η συγκίνηση που θα νιώθαμε θα ήταν εντελώς διαφορετική από αυτήν των «μυημένων» στα μαθηματικά. Όπως μας λέει ο κ. Ματ, οι μαθηματικοί δεν μετατρέπουν απαραίτητα στο μυαλό τους τις εξισώσεις σε εικόνες – ο τρόπος που τις αντιλαμβάνονται δεν είναι τόσο οπτικός όσο νοητικός. «Με το Surfer όμως η εξίσωση γίνεται εικόνα και αυτό είναι ένα άλλο είδος ομορφιάς το οποίο χρησιμοποιούμε πολύ στο Imaginary» εξηγεί. «Είναι η ομορφιά της οπτικοποίησης των εξισώσεων που προσφέρει ως αποτέλεσμα μια όμορφη εικόνα των αλγεβρικών επιφανειών στον χώρο. Και αυτό είναι ωραίο, με έναν διαφορετικό τρόπο».

Φαφούτη Λαλίνα

Πηγή: [tovima.gr](http://tovima.gr)