

# Χτίζοντας τον κόσμο με τα «πρώτα» τρίγωνα (Γεώργιος Χ. Κουμάκης, Επ. Καθηγητής Φιλοσοφίας Πανεπιστημίου Ιωαννίνων)

/ [Πεμπτουσία](#)



Ο Πρόκλος αναφέρει το μήκος των τριών πλευρών, που είναι η τριάδα, η τετράδα και η πεντάδα, δηλαδή 3, 4, 5, την περίμετρο του τριγώνου, που είναι 12 και το εμβαδόν αυτού που είναι το 6, δηλαδή η δωδεκάδα και η εξάδα αντίστοιχα. Το τρίγωνο αυτό λέγεται πρώτο τρίγωνο, διότι είναι το πρώτο ορθογώνιο τρίγωνο, που οι πλευρές του είναι ρητοί αριθμοί, 3, 4, 5, είναι δε ημιτρίγωνο ισοσκελούς τριγώνου και λέγεται ζωογονικό κατά τον Πρόκλο, διότι είναι οικείο στη γένεση και ενυπάρχουν σ' αυτό όλοι οι ζωογονικοί λόγοι, δηλαδή διπλάσιος, τριπλάσιος, κ.α., που αποτελούν τους επτά όρους της ψυχογονίας<sup>51</sup>.

Λέγεται δε και κοσμικό, επειδή οι πλευρές του είναι αρχές των κοσμικών σχημάτων, δηλαδή η τετράς του τετραγώνου, από το οποίο σχηματίζεται ο κύβος,

που συμβολίζει τη γη, η τριανταφυλλία του τριγώνου, το οποίο γεννά τα τρία κοσμικά στοιχεία, δηλαδή την πυραμίδα, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο, η πεμπάς, τέλος, χρησιμεύει ως αρχή του πενταγώνου, το οποίο συμπληρώνει το δωδεκάεδρο, με το οποίο διαμόρφωσε τον ουρανό, δηλαδή τον κόσμο ο δημιουργός στον Τίμαιο του Πλάτωνα.

Ο Πρόκλος συμπεραίνει ότι εύλογα το εν λόγω τρίγωνο ονομάζεται κοσμικό, μεταξύ άλλων και από τους σοφούς, οι οποίοι εξιστόρησαν τις υποθέσεις των Αιγυπτίων. Ισχυρίζονται ότι αυτό περιέχει τις αρχές όλων των πραγμάτων, αφού οι αριθμοί των τριών πλευρών του τριγώνου, 3, 4, 5 χαρακτηρίζονται από τον Πρόκλο εικόνες των πρώτων αιτίων<sup>52</sup>. Ο Πρόκλος [όπως είδαμε] ονομάζει το εν λόγω τρίγωνο πρώτο, επειδή είναι ορθογώνιο, τα δε μήκη των πλευρών του εκφράζονται με ρητούς αριθμούς<sup>53</sup>. Ο ορισμός αυτός του πρώτου τριγώνου είναι σημαντικός, διότι ο Πλούταρχος στο έργο του Πλατωνικά ζητήματα λέγει ότι κάθε ισογώνιο και ισόπλευρο πεντάγωνο του δωδεκαέδρου σύγκειται από τριάντα πρώτα σκαληνά τρίγωνα και επομένως το γεγονός αυτό το θεωρεί απομίμηση του ζωδιακού κύκλου και του έτους<sup>54</sup>. Αφού δηλαδή το καθένα από τα δώδεκα πεντάγωνα του δωδεκαέδρου αποτελείται από 30 πρώτα σκαληνά τρίγωνα, έπεται ότι ολόκληρο το δωδεκάεδρο περιέχει 360 τρίγωνα, όσα είναι δηλαδή τα μέρη του ζωδιακού κύκλου και οι ημέρες του έτους.

Εδώ ο σχολιαστής παρατηρεί ότι ο Πλούταρχος με τη δήλωσή του αυτήν δεν μας λέγει τι είδους τρίγωνα είναι αυτά<sup>55</sup>. Πράγματι είναι αλήθεια ότι ο Πλούταρχος δεν καθορίζει ρητά το είδος του τριγώνου, από το οποίο κατασκευάζεται το πεντάγωνο και κατ' ακολουθίαν το δωδεκάεδρο. Μας λέγει ωστόσο ότι είναι πρώτο σκαληνό. Αυτό που απομένει να διερευνηθεί ακόμη είναι τι σημαίνει πρώτο τρίγωνο στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά. Ο ίδιος ο Πλούταρχος αποκαλεί πρώτο τρίγωνο το κάλλιστο τρίγωνο, δηλαδή το ημιτρίγωνο ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρές 1,  $\sqrt{3}$ , 2, με το οποίο σχηματίζονται τρία κοσμικά σώματα, η πυραμίδα, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο<sup>56</sup>. Ο Πρόκλος [όπως είδαμε] ορίζει ως πρώτο τρίγωνο το κοσμικό τρίγωνο με πλευρές 3, 4, 5, δηλαδή με μήκη των πλευρών ρητούς αριθμούς. Διαπιστώνει επίσης ότι το κάλλιστο τρίγωνο, δηλαδή το ημιτρίγωνο ισοπλεύρου τριγώνου έχει αρμονικούς λόγους, παρόλο που το μήκος της υποτείνουσας είναι άρρητο. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι ο Πρόκλος αντιδιαστέλλει τους αρμονικούς λόγους από την αρμονική μεσότητα. Έτσι οι τρεις μεσότητες, τουτέστιν αριθμητική, αρμονική και γεωμετρική, έχουν αρμονικούς λόγους. Ωστόσο η αρμονική μεσότης είναι μία μόνο απ' αυτές<sup>57</sup>. Επομένως μπορούμε ίσως να υποθέσουμε ότι αρμονικοί λόγοι είναι εκείνοι που διέπονται από κάποιο είδος αναλογίας, ώστε να αποτελούν μια αρμονία.

Το κάλλιστον τρίγωνο λοιπόν κατά τον Πλούταρχο είναι μεν πρώτο τρίγωνο, το αποκλείει ωστόσο ρητά ως στοιχείο του δωδεκάεδρου<sup>58</sup>. Με αυτά τα δεδομένα, ένα τρίγωνο που αναμφίβολα πληροί τις προϋποθέσεις να χαρακτηριστεί πρώτο, είναι το ορθογώνιο τρίγωνο της Πολιτείας, με μήκη πλευρών 3, 4, 5<sup>59</sup>. Με το ίδιο σκεπτικό, το ορθογώνιο ημιτρίγωνο του ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής 36° και παρά τη βάση 72, το οποίο έχει γωνίες 18, 72 και 90 μοίρες, μπορεί να θεωρηθεί επίσης ότι οι πλευρές του βρίσκονται σε αναλογίες με ρητούς αριθμούς, 18, 72, 90. Οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου, έχουν τον λόγο της χρυσής τομής, αφού είναι η βάση και η διαγώνιος του πενταγώνου<sup>60</sup>. Από το σχήμα μας προκύπτει ότι το πεντάγωνο διαιρείται πράγματι σε 30 πρώτα τρίγωνα, τα οποία είναι δύο ειδών. Το ένα έχει πλευρές 3, 4, 5 και γωνίες 36, 54, 90, ενώ το άλλο έχει γωνίες 18, 72, 90. Η ρήση άρα του Πλουτάρχου είναι αληθής.

50 Πβ. Γ.Χ. Κουμάκης (2014), *Ο φιλόσοφος-Κυβερνήτης στην Επινόμιδα του Πλάτωνα, Ελληνική Φιλοσοφική Επιθεώρηση*, 31, 3-26. Μετάφραση στα αγγλικά: G.H. Koumakis (2015), *The Philosopher-Ruler of the Ideal City according to Plato's Epinomis, Diotima, Revue de Recherche Philosophique*, 43, 28-41.

51 Procli Diadochi (1901), *In Platonis rem publicam commentarii*. Ed. G. Kroll, vol. II. Lipsiae, Teubner, 42, 11-43, 17.

52 Αυτόθι, 45, 17-29.

53 Αυτόθι, 43, 1-3.

54 H. Cherniss, *Plutarch's Moralia*, ενθ' ανωτ., 1003 D: «ων έκαστον εκ τριάκοντα των πρώτων σκαληνών τριγώνων συνέστηκε».

55 Αυτόθι, σ. 54, σημ. α .

56 Πλούταρχος, *Ηθικά (Περί των εκλελοιπότων χρηστηρίων, De defectu oraculorum)*, 427 A: «η πυραμίς, εξ είκοσι και τεττάρων πρώτων τριγώνων· το δ' οκτάεδρον αέρος εκ τετταράκοντα και οκτώ των αυτών γίγνεται». Πβ. Πλατ., *Τιμ.*, 55 a-b.

57 Procli Diadochi, *In Republicam*, ενθ' ανωτ., 42, 23-43, 9: «και οράς όπως εισίν μεν αρμονικοί λόγοι και εν τούτω, καθάπερ εν τω ημιτριγώνω τω εν Τιμαίω. αλλ' εκεί μεν έστιν τι και άρρητον κατά μήκος εν ταις πλευραίς». Για το άρρητον βλέπε μεταξύ άλλων: H. Vogt (1910), *Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts*, *Bibliotheca Mathematica*, 3 Folge, vol. 10, 97-155.

58 Πλούταρχος, *Ηθικά (Περί των εκλελοιπότων χρηστηρίων, De defectu oraculorum)*, 428 A: «εώ γαρ, ότι και του καλουμένου δωδεκαέδρου στοιχείον άλλο ποιούσιν, ουκ εκείνο το σκαληνόν, εξ ου την πυραμίδα και το οκτάεδρον και το εικοσάεδρον ο Πλάτων συνίστησιν».

Πηγή: [deeaef.gr](http://deeaef.gr)

---

**Το παρόν κείμενο είναι είναι το τρίτο μέρος της εισήγησης του Γεώργιου Χ. Κουμάκη, Επ. Καθηγητή Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων στην Επιστημονική Ημερίδα «Ουσία, Δομή και Υπόστασις του Κόσμου κατά την Προσωκρατική Φιλοσοφία» -Κεντρικό Κτίριο του Πανεπιστημίου Αθηνών, 29/4/2014 - Οργάνωση: Διεθνής Επιστημονική Εταιρεία Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας, Ένωση Ελλήνων Φυσικών**

Δείτε το δεύτερο μέρος της εισήγησης [εδώ](#)