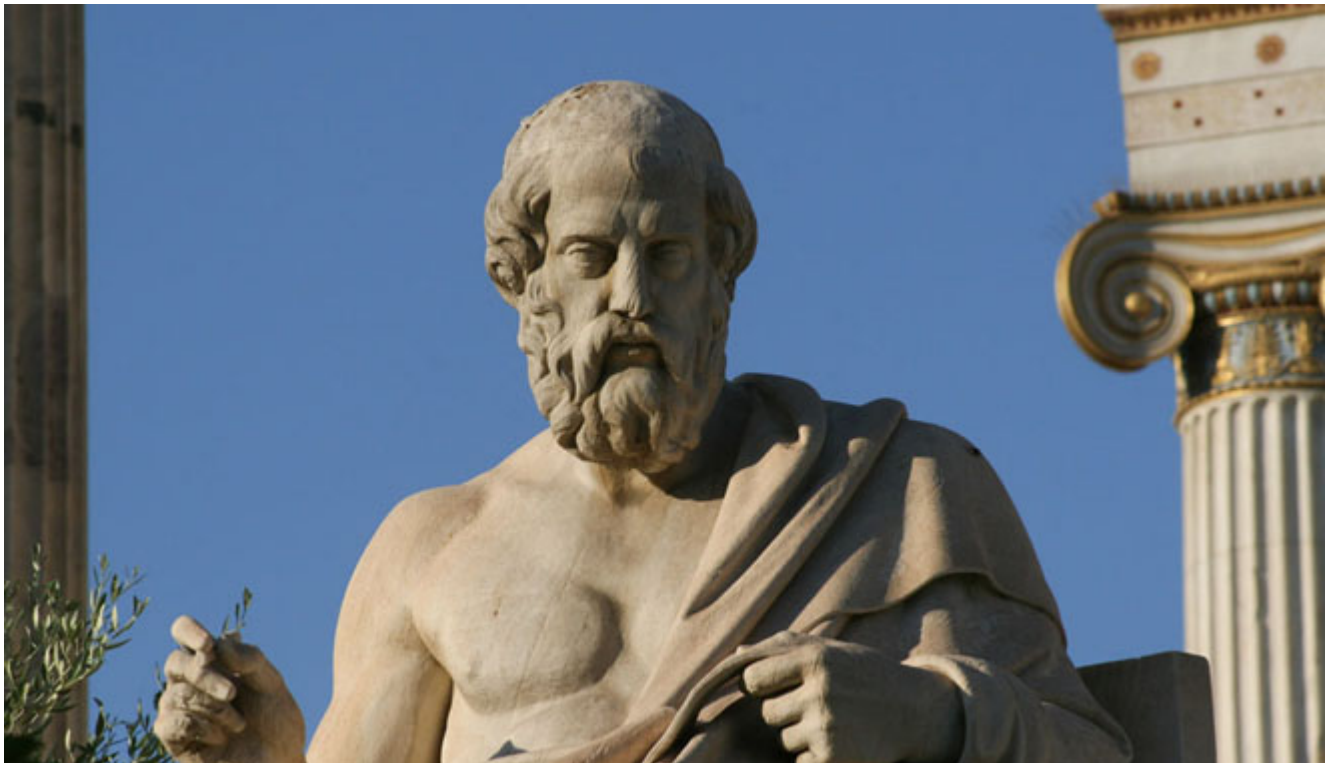
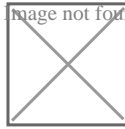


## **Γεωμετρικός αριθμός: μια άλλη «πλευρά» του Πλάτωνος (Χαράλαμπος Σπυρίδης, Καθηγητής Μουσικής Τμήματος Μουσικών Σπουδών της Φιλοσοφικής Σχολής του Παν/μίου Αθηνών)**

[/ Πεμπτουσία](#)

Image not found or type unknown



**Τέλειον Μείζον Σύστημα κατά χρώμα παρά Πλάτωνι: Θα σας ομιλήσω περί του υπό του Πλάτωνος λεγομένου γεωμετρικού αριθμού. Η ασάφεια της αναφοράς του Πλάτωνος περί του γεωμετρικού αριθμού είναι τοσούτον μεγάλη, ώστε είχαν καταστεί παροιμιώδης για τους αρχαίους. Τούτου του γεγονότος ένεκα υπήρξεν προβληματισμός μήπως παλαιόθεν εγένετο λαθοχειρία επί του κειμένου.**

Το δυστύχημα για την Φιλοσοφίαν είναι ότι εις ουδέν εκ των σωζομένων φιλοσοφικών συγγραμμάτων δεν υπάρχει ίχνος διασαφηνίσεως περί του συγκεκριμένου προβλήματος.

Όντως, απαιτείται υψίστου βαθμού μύησις, ήτοι βαθύταται γνώσεις Πυθαγορείου Αριθμητικής, Γεωμετρίας και Μουσικής, οι οποίες εις ολιγόλεπτον ομιλίαν δεν μεταφέρονται. Όμως, εντός του τακτού χρόνου θα παραθέσω την λύσιν του προβλήματος για πρώτην φοράν, το οποίον εν ολίγοις αφορά εις την κατατομήν του κανόνος κατά χρώμα παρά Πλάτωνι ή, όπως λέγομεν εις την Βυζαντινήν Μουσικήν, κατά το χρωματικόν γένος.

Ο Πλούταρχος εις το έργον του *Περί Μουσικής* εκθειάζει τον Πλάτωνα ως εμπειρότατον περί των θεμάτων της αρμονίας (=διαπασών) «ὁ Πλάτων ... ἔμπειρος ἄρμονίας ἦν».

Εκκινούμεν εκ της σεμνής, ουρανίου φύσεως, θείας, καλής και δαιμονίου αρμονίας, το μουσικό διάστημα το οποίον εκθειάζει ο Αριστοτέλης «ὅτι σεμνή ἡ ἄρμονία καὶ θεῖόν τι καὶ μέγα, Ἀριστοτέλης ὁ Πλάτωνος ταυτί λέγει ἡ δέ ἄρμονία ἐστὶν οὐρανία τήν φύσιν ἔχουσα θεῖαν καὶ καλήν καὶ δαιμονίαν».

Το διάστημα της αρμονίας (2:1), παρεμβάλλοντες εν πρώτοις εν αὐτῷ δύο μεσότητες, το καθιστώμεν τετραμερές. Αι δύο μεσότητες αὐται εἶναι ἡ τρίτη και ἡ τετάρτη εκ των δέκα Πυθαγορείων μεσοτήτων, ήτοι ἡ αρμονική ἡ υπενάντιος και ἡ ενάντιος της υπεναντίου. Συγκεκριμένως, δοθέντων δύο ακεραίων αριθμῶν α και γ (α>γ), δομοῦντων την Πλατωνικήν συστοιχίαν ταύτόν-θάτερον, ήτοι 1:2, κατά την Πυθαγόρειον θεωρίαν περί Μεσοτήτων ἡ αρμονική ἡ υπενάντιος μεσότης

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

προκύπτει εκ του ορισμοῦ της Αρμονικής ἡ υπεναντίου αναλογίας

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Τοιαύτην αναλογίαν  $2, \frac{4}{3}, 1$  δομοῦν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 6, 4, 3.

Ἡ ενάντιος της υπεναντίου μεσότης  $\beta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha + \gamma} = \frac{2^2 + 1^2}{2 + 1} = \frac{5}{3}$  προκύπτει εκ του ορισμοῦ της

εναντίου της υπεναντίου αναλογίας

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Τοιαύτην αναλογίαν  $2, \frac{5}{3}, 1$  δομοῦν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 6, 5, 3.

Εκ των ορισμῶν των ανωτέρω αναλογιών τα μέρη των και τα μεγέθη των και αι

υπεροχαί των είναι «κατ' ἀριθμόν καί ίσομετρίαν». Τούτο τονίζεται, διότι εις το πρώτον κλάσμα της αναλογίας συμμετέχουν όχι απλοί αριθμοί, αλλά διαφοραί (=μεγέθη) αριθμών.

Επί τῆ βάσει της Πυθαγορείου ρήσεως «ἄρμονία ἐστὶ κρᾶσις καὶ σύνθεσις ἐναντίων» ἐνθα υπονοεῖται ὅτι ἡ ἀρμονία, ἤτοι ἡ διαπασών ἢ ἡ οκτάβα, δομεῖται ὑπὸ της συνθέσεως δύο ἐναντιοτήτων. της ἀρμονικῆς ἢ ὑπεναντίου καὶ της ἐναντίου της ὑπεναντίου αναλογιών ἢ αναλογικοτήτων. Τὴν κρᾶσιν καὶ τὴν σύνθεσιν των δύο ἀναφερθεῖσων ἐναντιοτήτων τὴν γράφω ὡς 3, 4, 5, 6.

Ὅμως, οἱ προκύψαντες τέσσερις ἀριθμοὶ δομοῦν καὶ μίαν Ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης  $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{6 + 3}{2} = \frac{9}{2}$  της ὁποίας ἐντίθεται ὡς πέμπτον μέλος μεταξύ των

προαναφερθέντων τεσσάρων ἀριθμῶν 3, 4,  $\frac{9}{2}$ , 5, 6. Δια διπλασιασμοῦ των ἀριθμῶν της ἐν λόγῳ

πεμπάδος, αὐτὴ ἐκφράζεται δι' ἀκεραίων καὶ μόνον ἀριθμῶν ὡς 6, 8, 9, 10, 12.

Τοιοῦτοτρόπως, τὸ διάστημα της ἀρμονίας (2:1), παρεμβληθεισῶν των τριῶν μεσοτήτων, κατέστη πενταμερές 6, 8, 9, 10, 12. Λεπτολογούντες ἐτι περισσότερον, διαπιστούμεν τὴν ὑπαρξιν καὶ πέμπτης ἀναλογίας, της γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἣτις ἐκφράζεται ἐμπλέγδην καὶ ἐναλλάγδην ὑπὸ της σχέσεως (9/6 = 12/8).

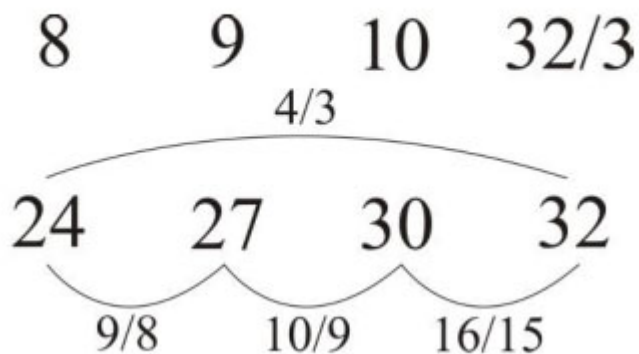
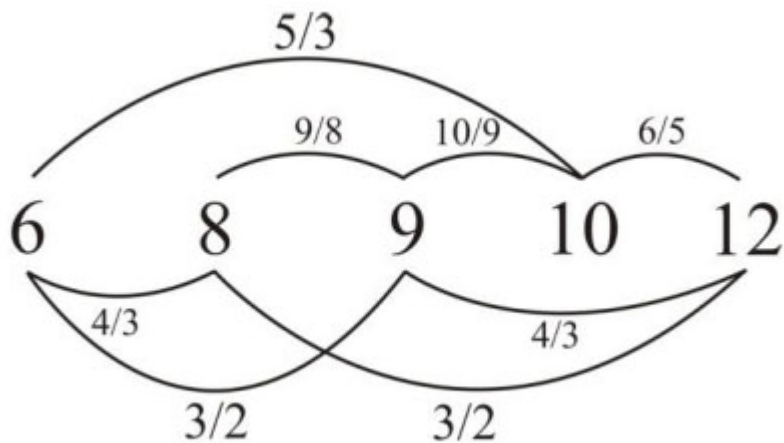
Μεταξύ των διαδοχικῶν ὄρων της ἀριθμητικῆς ἀναλογίας 6, 9, 12 σχηματίζονται τὰ μουσικὰ διαστήματα του διατονικοῦ γένους διαπέντε (9/6=3/2) καὶ διατεσσάρων (12/9=4/3), ἐνῶ μεταξύ των διαδοχικῶν ὄρων της ἀρμονικῆς ἢ ὑπεναντίου ἀναλογίας 6, 8, 12 σχηματίζονται τὰ μουσικὰ διαστήματα διατεσσάρων (8/6=4/3) καὶ διαπέντε (12/8=3/2).

Μεταξύ των διαδοχικῶν ὄρων της ἐναντίου της ὑπεναντίου ἀναλογίας 6, 10, 12 σχηματίζονται τὰ μουσικὰ διαστήματα του χρωματικοῦ γένους μείζων ἑκτη χρωματικὴ (10/6=5/3) καὶ τρίτη ἐλάσσων χρωματικὴ (12/10=6/5).

Μεταξύ της ἀρμονικῆς (8) καὶ ἀριθμητικῆς (9) μεσότητος σχηματίζεται τὸ διάστημα του ἐπογδόου τόνου (9/8) καὶ μεταξύ ἀριθμητικῆς (9) καὶ της ἐναντίου της ὑπεναντίου μεσότητος (10) σχηματίζεται ὁ ἐλάσσων χρωματικὸς τόνος (10/9).

Ἀνθυφαιρουμένων των διαστημάτων του διατονικοῦ καὶ του χρωματικοῦ γένους, γεννῶνται νέα λίαν ἐνδιαφέροντα χρωματικὰ μουσικὰ διαστήματα, ὡς εἶναι φερ' εἰπεῖν τὸ χρωματικὸν ἡμίτονον (16/15), δια του ὁποίου ομοῦ οἱ δύο

προαναφερθέντες τόνοι δομούν τετράχορδον ( $9/8 \cdot 10/9 \cdot 16/15 = 4/3$ ).



Δια δύο τετραχόρδων καθορίζονται τα μέρη της χρωματικής δομής του διαπασών δια ρητών αριθμών ως ακολούθως:

Το ένα τετράχορδον του διαπασών περιχαρακούται μεταξύ των αριθμών 6 και 8, ήτοι της Νήτης και της Παραμέσης.

Το έτερον τετράχορδον του διαπασών περιχαρακούται μεταξύ των αριθμών 12 και 9, ήτοι της Υπάτης και της Μέσης.

Τα προμνημονευθέντα δύο τετράχορδα είναι διεζευγμένα, οπότε μεταξύ των υπάρχει ο επόγδοος τόνος.

Τοιουτοτρόπως, εδομήθη, ως ο Αριστοτέλης μνημονεύει, το διαπασών διάστημα δια των αδρομερών του διαστηματικών στοιχείων, ήτοι δια των δύο τετραχόρδων του και του επογδού διαζευκτικού τόνου.

[Συνεχίζεται]

---

<sup>7</sup> Ο αριθμός 729 αναλυόμενος εις Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot (2^3)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$
 μας παρέχει ένα πυθαγόρειον τρίτονον  $\left(\frac{9}{8}\right)^3$  συν εννέα διαπασών  $\left(\frac{2}{1}\right)^9$ .

πυθαγόρειον τρίτονον ήτο το πλέον διάφωνον μουσικόν διάστημα του μουσικού συστήματος, το οποίον εγνώριζεν ο Πλάτων, το άκουσμα του οποίου προεκάλει αίσθημα άσης. Εξακολουθεί και σήμερα το πυθαγόρειον τρίτονον να φέρει τον αυτόν οικτρώς διάφωνον χαρακτήρα (*diabolo in musica*) εις το δυτικόν τονικόν σύστημα 2.500 χρόνια μετά. Αυτό το οποίον ο Πλάτων εξετίμησεν δια του αριθμού 729 ήτο η σχέσις μεταξύ του βασιλέως και του τυράννου και την σχέσιν ταύτην την θεωρεί ως την μεγίστην δυνατήν έντασιν-άσιν εντός ενός πολιτισμένου συστήματος.

---

**Παρατήρηση:** το παρόν άρθρο είναι το τέταρτο μέρος της εισήγησης του Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, Καθηγητή του Τμήματος Μουσικών Σπουδών Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών & Κοσμήτορα της Διεθνούς Επιστημονικής Εταιρείας της Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας, με τίτλο «Τέλειον Μείζον Σύστημα κατά χρώμα παρά Πλάτωνι», στην Επιστημονική Ημερίδα «Φιλοσοφία, Φυσικές Επιστήμες, Βιοηθική», που διοργανώθηκε από τη Διεθνή Επιστημονική Εταιρεία Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας και την Ένωση Ελλήνων Φυσικών, στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, στις 12/11/2014.

Το τρίτο μέρος της ομιλίας μπορείτε να το διαβάσετε [εδώ](#)