21 Αυγούστου 2017

Η τελειότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η πρώτη αμφισβήτησή της

/ Πεμπτουσία

Image not found or type unknown

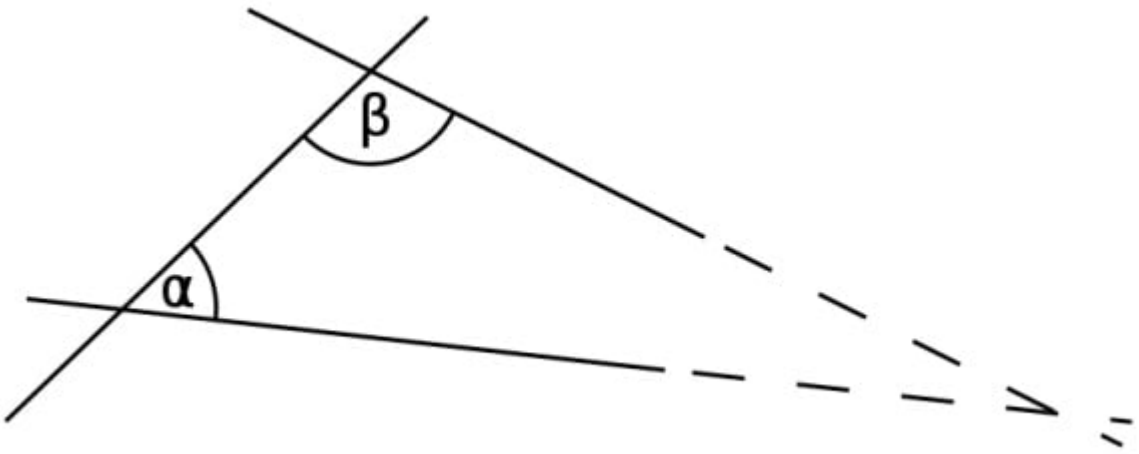
Ντοστογιέφσκι και μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία που μάθατε στο σχολείο ήταν πιθανώς μια μοντέρνα έκδοση του περίφημου βιβλίου «**Στοιχεία**» που έγραψε γύρω στο 300 π.Χ. ο Ευκλείδης. Λέγεται ότι αυτό το βιβλίο είναι το πιο πολυδιαβασμένο μετά τη βίβλο και θεωρείται ως το αρχέτυπο ενός αυστηρού συμπερασματικού συστήματος. Στο πρώτο από τα δεκατρία «κεφάλαια» των Στοιχείων διατυπώνονται εκτός από τους ορισμούς και 5 Αιτήματα (ή Αξιώματα) για την Γεωμετρία:

> **Τα 5 Αιτήματα του Ευκλείδη**
>
> **1^{ο} Αίτημα**: Μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία γραμμή από οποιοδήποτε σημείο προς οποιοδήποτε σημείο
> **2^{ο} Αίτημα**: Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.
> **3^{ο} Αίτημα**: Μπορούμε να γράψουμε έναν κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα.
> **4^{ο} Αίτημα**: Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.
> **5^{ο} Αίτημα**: Αν μια ευθεία που τέμνει δυο άλλες ευθείες γραμμές σχηματίζει εντός και επί τα αυτά γωνίες συνολικά λιγότερες από δυο ορθές, οι εν λόγω ευθείες, προεκτεινόμενες απεριόριστα, συναντώνται σε εκείνη την μεριά όπου σχηματίζονται οι γωνίες που είναι λιγότερες από δυο ορθές.

Το 5^{ο} Αίτημα φαίνεται να είναι απόλυτα συμβατό με τη διαίσθησή μας. Αλλά σε πολλούς μαθηματικούς (και όχι μόνο) στους επόμενους 21 αιώνες που

ακολούθησαν μετά τον Ευκλείδη, υπήρχε η αίσθηση ότι πρόκειται για κάτι πιο πολύπλοκο για να ονομαστεί αίτημα και μάλλον θα έπρεπε να αποδειχθεί ως πρόταση.



Πέμπτο Αίτημα: Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες

Πολλοί μαθηματικοί, που έμεναν ανικανοποίητοι από το $5^{ο}$ Αίτημα του Ευκλείδη προσπάθησαν να αποδείξουν ότι είναι εξαρτημένο, ότι δηλαδή μπορεί να εξαχθεί από τα άλλα τέσσερα αιτήματα. Πολλοί πίστεψαν ότι το είχαν πετύχει, πάντοτε όμως χρησιμοποιούσαν κάποια επιπλέον υπόθεση που είχε διαφύγει της προσοχής τους. Άλλοι μαθηματικοί διατύπωσαν την άποψη ότι θα έπρεπε να αντικατασταθεί από κάποιο πιο ευλογοφανές αίτημα.

Οδηγήθηκαν έτσι σε αξιώματα ισοδύναμα προς το $5^{ο}$ Αίτημα του Ευκλείδη, θεωρώντας ότι το νέο τους αξίωμα ήταν και απλούστερο στη διατύπωση και προφανέστερο στη διαίσθηση.

Για παράδειγμα οι επόμενες διατυπώσεις: «**από ένα σημείο εκτός δοθείσας ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλη ευθεία ως προς την δοθείσα**»
και
«**το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι $180^{ο}$**»
αποδεικνύονται ισοδύναμες με το $5^{ο}$ Αίτημα του Ευκλείδη.

Ο Giovanni Girolamo Saccheri (1667 – 1733), ένας ιησουίτης ιερέας και καθηγητής των μαθηματικών, στην προσπάθειά του να αποδείξει ότι το $5^{ο}$ Αίτημα του Ευκλείδη ήταν εξαρτημένο από τα άλλα τέσσερα, οδηγήθηκε σχεδόν στην ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκατό χρόνια πριν την τελική της ανακάλυψη. Σύμφωνα με τον J. L. Heath "ο Saccheri υπήρξε θύμα της

προκατάληψης της εποχής του ότι η μόνη δυνατή γεωμετρία ήταν η Ευκλείδεια, και παρουσιάζει το περίεργο θέαμα ενός ανθρώπου που ανεγείρει ένα οικοδόμημα πάνω σε καινούργια θεμέλια με σπουδή και εργατικότητα, σκοπεύοντας να το γκρεμίσει αμέσως μετά».

[Συνεχίζεται]